線型微分方程式系について (函数解析的方法による解析学研究会報告集)

AUTHOR(S):
佐藤, 幹夫; 一松, 信

数理解析研究所講究録
59巻 1968年 225-237

線型微分方程式系について

東大 教養 佐藤幹夫
立教大 理 一松 信

（要旨） 解の範囲を hyperfunction（佐藤の意味；[1], [2] 参照）に拡張することは，形式的な拡張ではなく，微分方程式にとって本質的な意味をもつことを述べる．小松[4] の成果を中心に，微分作用素とは何か，という問題に言及する．

I. Cohomology 論

I. 1. 層の cohomology

X を paracompact な空間，$\mathcal{S}$ をその上の加群の層 (sheaf) とすれば，cohomology 加群 $H^p(X, \mathcal{S})$ が定義できる．さらに一般に，X の開集合 U に対して，相対 cohomology 加群 $H^p(X \bmod U, \mathcal{S})$ が定義できる．

Cohomology 加群の定義はいろいろ可能であるが，通例は resolution，すなわち層の exact sequence

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \cdots$$

を作り，$\mathcal{F}^i$ が単純な性質をもつようにする．もし $\mathcal{F}^i$ が

(i) $H^p(X, \mathcal{F}^i) = 0 \qquad (p \geqq 1,\ i \geqq 0)$

をみたすものならば, $\tilde{\varphi}^p : \Gamma(X, \mathcal{F}^p) \to \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1})$ の自然な写像として, ($\tilde{\varphi}^{-1} = 0$ と解釈する)

$$H^p(X, \mathcal{S}) = (\mathrm{Ker}\ \tilde{\varphi}^p)/(\mathrm{Im}\ \tilde{\varphi}^{p-1})$$

と定義できる.

注. H^pを定義する途中に(i)は論理的にはおかしいが,「$H^p = 0$」という条件は別の形でのべられ, 上記の論法は正当化される.

同様に $\mathcal{F}^i$ が

(ii) $H^p(X \bmod U, \mathcal{F}^i) = 0 \qquad (p \geqq 1,\ i \geqq 0)$

をみたすものならば, $\Gamma(X, \mathcal{F}^p)$のうち開集合 $X - U$ 内に台をもつ section に限定して, 上記と同じく $\Gamma(X, \mathcal{F}^{p-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}^p) \to \Gamma(X, \mathcal{F}^{p+1})$ の cohomology から $H^p(X \bmod U, \mathcal{S})$ を定義することができる.

上のような $\mathcal{F}^i$ として, H. Cartan は fine sheaf (近年では soft sheaf) を利用した. しかし近年では, Grothendieck らによる flabby sheaf による resolution が普通に使われる.

$\mathcal{F}$が flabby とは, 任意の開集合 U に対し, 自然な制限 $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ がつねに onto のことである. この術語はいろいろあったが, 近年は flabby に統一された. Flabby sheaf は (i), (ii) をともにみたす ── これに対して fine sheaf は(i)はみたすが(ii)をみたさないことがある. ── じつはすべ

ての開集合Uに対して(ii) をみたす (U＝空なら(i)になる) 層は flabby であることが証明されている.

I. 2. de Rham の定理と Poincaré の双対定理

以下 M を paracompact な C^∞ 級多様体とし, 簡単なために向きづけ可能で向きづけられているとする. 次元を n とし, Ω^p を M 上の C^∞ 級 p 次微分式の芽のなす層とすれば,

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \to \cdots \to \Omega^n \to 0$$

は exact sequence であり, これから ($\Omega^{-1}=0$ と解する)

$$H^p(M,\mathbb{C}) \cong \{d\omega = 0 \mid \omega \in \Gamma(M,\Omega^p)\}/d\Gamma(M,\Omega^{p-1})$$

をうる (Ω^i はすべて fine である). これが de Rham の定理である. これは, $H^p(M,\mathbb{C})$ の計算と, 右辺の周期をもつ微分式の量の規定と, 二つの意味をもつ.

さらに M が compact ならば, C^∞ 級微分式の双対にあたる distribution 係数の微分式 (いわゆる current) による分解が作られ, これも fine である. そして

$$H^p(M,\mathbb{C}) \longleftrightarrow H^{n-p}(M,\mathbb{C})$$

はともに有限次元で, 両者の間には自然な双対関係が成立する (Poincaré の双対定理).

ところで, C^1 あるいは C^∞ 級多様体は R^n に埋めこむことができ 前の微分構造と両立する C^ω 級多様体の構造が導入できる. M を C^ω 級とし, Ω^p を C^ω 級の微分式の芽の層

としてみよう．このときにはΩ^pは fine ではない．しかし実解析的多様体は「実Stein」多様体であるという結果（Malgrange[5]；その他）により，やはりこの場合にも結果的には
$H^p(M, \Omega^i) = 0 \quad (p \geq 1, i \geq 0)$ が示され，~~した~~がって，
C^ω級の微分式に対しても，de Rham の定理が成立する．

この場合 Poincaré の双対定理は，つぎの形で paracompact な多様体M上で成立する．M内に compact 集合Kをとり，$M - K = U$（開集合）とおく．実解析的なp次微分式の芽の層を$\mathcal{A}^p$とすると，exact sequence

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \cdots \to \mathcal{A}^n \to 0$$

ができる．この双対として，hyperfunction（を係数とする微分式の芽の層$\mathcal{B}^p$）が現われ，exact sequence

$$0 \leftarrow \mathcal{B}^n \xleftarrow{d} \mathcal{B}^{n-1} \leftarrow \cdots \xleftarrow{d} \mathcal{B}^0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow 0$$

が作られる．しかも$\mathcal{B}^p$はすべて flabby sheaf である．したがって相対 cohomology が$\mathcal{B}^p$から計算され

$$H^p(K, \mathbb{C}) \longleftrightarrow H^{n-p}(M \bmod U, \mathbb{C})$$

が（必ずしも有限次元ではないが）互いに双対になる．これは Alexander-Pontjagin の双対性とよばれるもので，Poincaré の双対定理の一般化である．ここで$H^{n-p}(M \bmod U, \mathbb{C})$は，Kを含むMに依存せず，つまりKのいくらでも近い近傍の状態だけで定まることが知られている．

ここで $H^p(K, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$（と同型の加群）の帰納的極限で、そのたかだか可算個の直和である。$H^{n-p}(M \bmod U, \mathbb{C})$ は、$\mathbb{C}$ の射影的極限で、そのたかだか可算個の完全直積である。もし M が compact で $M=K$ ならば、$H^{n-p}(M, \mathbb{C})$ は直和かつ完全直積だから有限次元となり、前記の Poincaré の双対定理に還元される。

I.3 拡張とまとめ

上記の例でもわかるように、hyperfunction への拡張は、単なる拡張という以上に、相対化を可能にするという意味で、より大きな意義をもつ。

M が複素多様体ならば、d のかわりに $\bar{\partial}$ を使った Dolbeault の resolution により、同じような定理が示される。Compact な M に対するのが、Serre の双対定理であるが、これも同様に相対化できる。

そもそも C^∞ 級函数は、一箇所の挙動が、他に何の影響も及ぼさない、という意味で、「烏合の衆」であり、だからこそ局所的な議論に使いやすかった。これにひきかえ C^ω 級函数は、一箇所で全部が定まってしまう「筋金入りの組織体」であるから、使いにくくて、これまで敬遠されがちであった。だからこそ C^∞ 級函数の共役空間として $C^{-\infty}$ ともいうべき

distribution が作られたわけである．しかし上述の実 Stein 多様体の性質と相対化により，もっと自然な C^ω 級函数によっても同様の（あるいはより深い）結果がえられるとすれば，「人工的」な C^∞ 級函数にこだわらず，C^ω 級函数をもっと活用すべきではなかろうか．── そうなると differential topology というのも「analytic」topology と改名する方がふさわしくなるかもしれない．

ところで de Rham の定理は $df=0$ すなわち

$$\partial f/\partial x_i = 0$$

に相当するものであり，複素多様体の Dolbeault の定理は

$$\partial f/\partial \bar{z}_i = 0$$

に相当するものである．とすれば，もっと一般な線型偏微分方程式系（さしあたっては定数係数）について，同じような理論が作られてもよいであろう．Komatsu [4] はじっさいにそれを試みたもので，つぎに紹介する．

なお hyperfunction は analytic manifold 上だけでなく，algebraic variety 上にも同様に作ることが可能である．ただしこの場合には，事実上 δ 函数に近いものになる．

II. 線型微分方程式系

II 1. 線型微分方程式系の定式化

$\mathbb{C}$ 上の n 変数の多項式環 $\mathbb{C}[\xi_1, \cdots, \xi_n]$ を $\mathbb{C}[\xi]$ と記す. この上の coherent module $\mathcal{M}$ とは, $\mathbb{C}[\xi]$ の何乗かの形の自由 module の cokernel で表わされるものである. Hilbert の syzygy 定理により, このときには $\mathcal{M}$ の射影的分解

$$0 \to \mathbb{C}[\xi]^{r_m} \to \cdots\cdots \to \mathbb{C}[\xi]^{r_1} \xrightarrow{P(\xi)} \mathbb{C}[\xi]^{r_0} \to \mathcal{M} \to 0$$

$$(m \leqq n)$$

が作られる. 写像 $P(\xi)$ は $r_1 \times r_0$ 次行列で表現され, $\mathcal{M}$ は $\mathbb{C}[\xi]^{r_0}$ をその像で割ったものと同型であるから, その関係式はある方程式系で表わされる. ξ_i を $\partial/\partial x_i$ におきかえたものが微分方程式系であり, $P(\xi)$ は微分作用素とみなされる. もちろん r_0, r_1 は一意的でなく, その形は変わりうるが, その本質的な意味は $\mathcal{M}$ だけによって定まる.

つぎにこの方程式系の解を考える. そのためには, 解の範囲を定めなければいけない. 解を層 $\mathcal{F}$ の内からさがすことにする. もちろん $\mathcal{F}$ は層をなすこと, すなわち局所的な性質できめられるものであることが必要であり, さらに微分演算について閉じていなければならない. このような性質をみたす具体例として, C^{∞} (級の函数の芽の層), $C^{-\infty}$ (distribution), $\mathcal{A}(= C^{\omega})$, $\mathcal{B}$ (hyperfunction), $\mathcal{O}$ (正則函

数）などがよく使われる．

$P(\xi)$ の随伴写像として，微分作用素 $P(\mathrm{grad})$ が作られ，適当な条件の下で，上記と双対的な exact sequence

$$0 \leftarrow \mathcal{F}^{x_m} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{F}^{x_1} \xleftarrow{P(\mathrm{grad})} \mathcal{F}^{x_0} \leftarrow \mathcal{S} \leftarrow 0$$

が作られる．$P(\mathrm{grad})$ の核 $\mathcal{S}$ が，正しく<u>解</u>にほかならない．すなわち $\mathcal{S}$ は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{F}$ とから

$$\mathcal{S} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[\xi]}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

として与えられる．

具体的に $\mathcal{F}=C^{\infty}$, $C^{-\infty}$ のとき，exact sequence になることは Ehrenpreis [3] が示した．$\mathcal{F}=C^{\omega}$ のときは Malgrange の研究に含まれる．$\mathcal{F}=\mathcal{B}$ のときには flabby resolution になり，やはり exact sequence になることが，Komatsu [4] によって示された．

II.2. 解の存在

空間が通例の Euclid 空間で領域 V が<u>凸</u>のときには，

$$H^p(V, \mathcal{S})=0$$

であり，大域的な解のあることが証明されている（Komatsu [4]）．ここで凸という条件は，恐らく証明の技法上の条件であって，必要条件ではないと思われる．しかし無条件では大域的な（一価な）解の存在は保証されない．

注. 最近若林剛は, $\partial u/\partial \bar{z}_1 = f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ ($n \geq 2$; f は正則函数) について, 正則領域で超球と同位相な V, 多項式近似の Runge の定理の成立する領域 V, 正則領域で切り口 (平面による) がつねに単連結 (ただし連結とは限らない) な V で, これが大域的に一価な解をもたない例を構成した. これは $\partial u/\partial \bar{z}_1 = \cdots = \partial u/\partial \bar{z}_n = 0$ が同時に並んでいる連立方程式系であるが, このような一見自明に見える方程式系でさえ, 大域的な解の存在は, 予想外に厄介な問題である.

以上は一般的な場合であるが, とくに楕円型作用素の場合には, hyperfunction としての解は, 自動的に C^ω 級の解になり, 上記の列は C^ω で flabby resolution を与える.

また Harvey は単独の方程式については, $\mathbb{R}^n$ の任意の領域において, 大域的な解の存在を示している. しかし一般の方程式系となると, 上記の簡単な例でもみられるように, 問題はそれほど簡単ではない.

なお解の層 $\mathcal{S}$ に対する (多様体上で考えて)

$$\sum (-1)^p \underbrace{\dim} H^p(M \ \mathrm{mod}\,(M-K), \mathcal{S})$$

(M は基礎の多様体, K はその上の compact 集合)

は, 強度の不変式である. とくに $M = K$ (compact) のときは Attiyah-Singer の理論で示されたものである.

II.3. 微分作用素の意味

前にものべたように，distribution を hyperfunction に拡張したのは，単なる拡張のための拡張ではなく，本質的な意味がある．常微分方程式の不確定特異点における解のように，指数的に増加し，局所積分可能でない函数は distribution にはならない．それに対して解析的係数（とくに定数係数）で解が解析函数なら，それらはすべて hyperfunction としては自然に扱うことができる．C^∞ 級函数が好んで使われたのは，単に使い易いという便宜的な理由にすぎないように思われる．

しかし偏微分方程式になると，解の範囲が狭いためにうまくとけない，というよりも，方程式系自体の性格から解がえにくい場合がしばしばある．（もっともさらに拡張して「多価な」超函数といったものが自由に駆使できれば，話は変わってくるのかもしれないが，目下の所，「多価函数」を「一価函数」と同じく大域的に勝手に扱うことは大問題である．）

ところで上記の考察をさらに一般化すれば，多様体 M 上の層 $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ を定め，coherent な左 $\mathcal{L}$-module $\mathcal{M}$ の射影的分解

$$\cdots\cdots \to \mathcal{L}^{(1)} \to \mathcal{L}^{(0)} \to \mathcal{M} \to 0$$

を作り，それの共役として

$$\cdots \leftarrow \mathcal{F}^{(1)} \leftarrow \mathcal{F}^{(0)} \leftarrow \mathcal{S} \leftarrow 0$$

を作り，$\mathcal{M}$を微分作用素（の表現），$\mathcal{S} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ を解と解釈することができる．もちろんこの下の列が exact になるためには条件がいるが，$\mathcal{F}$を hyperfunction にとったとき，適当な条件の下で flabby resolution がえられる．楕円的作用素などはそうなる．ただし特異点の所はさけなければならない．

ところでMがC^ω級多様体ならば，それを複素 Stein 多様体Xにはめこみ，しかもXをMにいくらでも近くとることができる．この場合

$$H^n(X \bmod (X-M), \mathcal{O})$$

が hyperfunctions であった．

$X \times X$ の対角集合ΔはXと同一視できるが，

$$H^n(X \times X \bmod (X \times X - \Delta), \mathcal{O}')$$

はΔの近傍のみで定まる．ただしここに$\mathcal{O}'$は $2n$ 変数の正則函数で，はじめの n 変数についてはスカラー函数，あとの n 変数については n 次正則微分形式であるようなものの芽のなす層である．この要素はいわば hyperdifferential operator ともいうべきもので，X上の一種の∞位の微分作用素（∞回までの微分を含むが，しかし係数が十分に早く減少して，意味をもつもの）とみなせる．

普通の微分作用素は多項式に対応するもので，distribution で考える限り，局所有限位ということはさけられない制約である．上記の hyperdifferential operator は，この多項式をいわゆる指数型の整函数（∞での増加が，指数函数よりもゆるやかなもの）に拡張したことにあたる．これに対して Paley-Wiener の理論に相当するものが考えられる．

定数係数の場合には，普通の微分作用素は $\delta^{(p)}$ の一次結合との convolution とみなされる．同様に上記の hyperdifferential operator は，点を台とする hyperfunction（それは $\delta^{(p)}$ よりも広く，「無限位数」でもありうる）との convolution とみなされ，その双対が正しく指数型の整函数になるのである．

解析的多様体を代数的多様体とし，Stein 多様体のかわりに affine 多様体を使えば，同じように hyperdifferential operator が作られるが，それは本質的には普通の微分作用素と同じものになる．

最後はいささか哲学的な話になったが，考察の範囲を hyperfunction に拡張することにより，見通しがよくなるだけでなく，本質的に新しい結果もえられることを強調したい．

文　献

[1] 佐藤幹夫，超函数の理論について，数学 10 (1958), 1-27.

[2] M.Sato, Theory of hyperfunctions I,II, J.Fac. Sci. Univ. Tokyo, I 8 (1959/60), 139-193;387-437.

[3] L.Ehrenpreis, A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, Proc. Int. Symposium on linear spaces, 161-174, Jerusalem, 1961.

[4] H.Komatsu, Resolutions by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients, Math. Annalen, 176 (1968), 77-86.

[5] B.Malgrange, Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. Math. France 85 (1957),231-237.

[6] H. Komatsu, On the Alexander-Pontrjagin Duality Theorem, Proc. Japan Academy 44 (1968), 489-490